

文章编号:1000-8055(2011)03-0524-06

低速流数值模拟的低耗散预处理格式

曹 宁^{1,2}, 吴颂平^{1,2}

(1. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191;
2. 国家计算流体力学实验室, 北京 100191)

摘 要: 在预处理 Roe 格式中加入可调参数, 给出了一种低耗散预处理 Roe 格式, 并分析了可调参数的取值规律. 在极低速区, 低耗散预处理 Roe 格式反应了流动的实际耗散; 在与来流速度相近的区域, 低耗散预处理 Roe 格式可以保证流场的稳定性. 对低马赫数、低雷诺数定常圆柱绕流和低马赫数、高雷诺数 NA-CA0012 翼型绕流所做的数值实验, 得到了比较满意的结果, 表明这一改进对于低速流数值模拟是有效的. 通过数值实验, 发现计算格式的数值黏性对低速流动的计算结果有显著影响.

关 键 词: 数值方法; 定常流; 圆柱绕流; 预处理方法; 翼型

中图分类号: V211.3

文献标识码: A

Low-diffusion preconditioning scheme for numerical simulation of low-speed flows

CAO Ning^{1,2}, WU Song-ping^{1,2}

(1. School of Aeronautics Science and Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;
2. National Laboratory for Computational Fluid Dynamic, Beijing 100191, China)

Abstract: A low-diffusion preconditioning Roe scheme was proposed by using an adjustable parameter in preconditioning Roe scheme to control the numerical dissipation and the adjustable parameter value rules. The low-diffusion preconditioning Roe scheme reflected the real physical dissipation in the extremely low-speed zone. In the region similar to the inflow speed, low-diffusion preconditioning Roe scheme could ensure the stability of the flow field. The low Mach/low Reynolds number steady solutions of viscous flow passing a circular cylinder and the low Mach/high Reynolds number steady solutions of viscous flow passing NA-CA0012 were satisfied. Numerical results show the efficiency of the new scheme to simulate low Mach number flows. Numerical experiments show that the numerical dissipation of the scheme has a notable effect on low-speed flow numerical simulation with preconditioning method.

Key words: numerical methods; steady flow; flow past a cylinder; preconditioning method; airfoil

在计算流体力学中, 时间相关法被广泛运用于可压缩流计算中. 然而在计算低马赫数流动时, 时间相关法表现得并不好. 这是因为流动速度和

声速相比量级相差很大, 时间相关方程的对流项具有很强的刚性, 因此信息在流场中的传播速度相差很大, 计算收敛很慢^[1]. 为此人们发展了预

收稿日期: 2010-09-16; 修订日期: 2010-11-30

作者简介: 曹宁(1980—), 男, 满族, 河北青龙满族自治县人, 博士生, 研究方向为计算流体力学.

处理算法,在时间相关方程的时间导数项前乘以一个预处理矩阵,使所有的特征速度都具有相同的量级,条件数大大降低,从而克服低马赫数流动的刚性^[2-3].

Turkel^[4]发展了带有两个参数的预处理矩阵. Merkle 等^[5]在此基础上,给出了适用于欧拉方程的预处理矩阵,后来又将其推广到 Navier-Stokes(N-S)方程上去. Choi 和 Merkle 等^[6]设计的预处理矩阵则考虑了雷诺数的影响.

在理想情况下,预处理矩阵中的参数 ϵ 应与当地马赫数的平方同量级. 因为特征矩阵中存在 $1/\epsilon$ 因子,使计算过程的稳定性欠佳. 为了使计算收敛,不得不对预处理参数 ϵ 做截断处理. 这意味着预处理方法只能保证流场中相对高速部分的计算精度,而对极低速部分,无论是精度还是收敛速度都无法保证. 对于低速区域较大的流动现象,截断参数将引起过大的耗散,无疑对于计算精度有不利的影

响. 本文针对现有基于 Roe 格式的预处理方法在低速区耗散过大的情况,提出了改进方法. 在格式中加入可以调节格式数值黏性的参数,得到了低耗散预处理 Roe 格式,给出了数值黏性参数的取值方法. 本文将其应用于低马赫数、低雷诺数定常圆柱绕流和低马赫数、高雷诺数 NACA0012 翼型的数值模拟得到了满意的结果,表明本文提出的方法是有效的.

1 数值算法

1.1 控制方程组

将基于守恒变量 $Q = (\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad E)^T$ 的二维可压缩流守恒型控制方程组,改为基于原变量 $q = (p \quad u \quad v \quad T)^T$ 的方程组,并在时间导数项上乘以预处理矩阵 Γ ,可以得到带预处理的控制方程组. 在计算坐标系下,其形式为

$$\Gamma \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial F_v}{\partial \xi} + \frac{\partial G_v}{\partial \eta} \right] \quad (1)$$

采用的 Lee 提出的预处理矩阵^[7]

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon \gamma R T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u}{\epsilon \gamma R T} & \rho & 0 & 0 \\ \frac{v}{\epsilon \gamma R T} & 0 & \rho & 0 \\ \frac{H}{\epsilon \gamma R T} - 1 & \rho u & \rho v & \rho c_p \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中 ϵ 为预处理参数, $H = c_p T + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, c_p 为比定压热容, R 为气体常数.

这一预处理矩阵忽略了 $\frac{\partial p}{\partial T}$ 的影响,既可以避免误差变大,又不会影响计算过程的收敛特性. 由于预处理矩阵 $\Gamma \neq \frac{\partial Q}{\partial q}$, 因此预处理改变了原方程组中的时间导数项. 上述预处理方法只适用于定常流.

1.2 预处理方程的特征值和特征向量

记矩阵 $A = \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial q}$, $B = \Gamma^{-1} \frac{\partial G}{\partial q}$, 其特征值为

$$\lambda_{1,2} = \theta$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} [\theta(1 + \epsilon) \pm \sqrt{\theta^2(1 - \epsilon)^2 + 4\epsilon k^2 c^2}]$$

其中对于 A , $k_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, $k_2 = \frac{\partial \xi}{\partial y}$; 对于 B , $k_1 = \frac{\partial \eta}{\partial x}$,

$$k_2 = \frac{\partial \eta}{\partial y}, k^2 = k_1^2 + k_2^2, \theta = k_1 u + k_2 v.$$

右特征矩阵 R 的形式为

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\epsilon c^2}{\tilde{s}} & -\frac{\epsilon c^2}{\tilde{s}} \\ \frac{u}{T} & \tilde{k}_2 & \frac{-2\tilde{k}_1 \epsilon c^2}{\rho[\tilde{\theta}(1 - \epsilon) - \tilde{s}]\tilde{s}} & \frac{2\tilde{k}_1 \epsilon c^2}{\rho[\tilde{\theta}(1 - \epsilon) + \tilde{s}]\tilde{s}} \\ \frac{v}{T} & -\tilde{k}_1 & \frac{-2\tilde{k}_2 \epsilon c^2}{\rho[\tilde{\theta}(1 - \epsilon) - \tilde{s}]\tilde{s}} & \frac{2\tilde{k}_2 \epsilon c^2}{\rho[\tilde{\theta}(1 - \epsilon) + \tilde{s}]\tilde{s}} \\ 1 & 0 & \frac{\epsilon c^2}{\rho c_p \tilde{s}} & -\frac{\epsilon c^2}{\rho c_p \tilde{s}} \end{pmatrix}$$

其中 $\tilde{k}_1 = k_1/k$, $\tilde{k}_2 = k_2/k$, $\tilde{\theta} = \tilde{k}_1 u + \tilde{k}_2 v$, $\tilde{s} = \sqrt{\theta^2(1 - \epsilon)^2 + 4\epsilon c^2}$.

1.3 预处理参数的选取

预处理参数的选择,文献[8]列举了 5 种不同的预处理参数选取方法:

- 1) 全局预处理;
- 2) 当地预处理;
- 3) 带有全局截断参数的当地预处理;
- 4) 带有当地截断参数的当地预处理;
- 5) 当地极值预处理.

本文预处理参数 ϵ 采用方法 3) 和方法 5) 相结合的方法,带有全局截断参数的当地极值预处理方式定义为

$$\epsilon = \min\{\max(\epsilon_0, Ma^2, Ma_{\text{neighbor}}^2), 1\} \quad (3)$$

式中 $\epsilon_0 = Ma_{\text{ref}}^2$, Ma_{ref} 为参考马赫数,可取远场来

流马赫数, Ma 为当地马赫数, Ma_{neighbor} 为相邻单元马赫数的最大值.

1.4 差分格式

对于定常流, 差分格式在时间上按隐式处理, 用 Yoon 和 Jameson^[9] 提出的 LU-SGS(lower upper symmetric Gauss-Seidel)方法求解. 采用中心差分格式计算黏性通量, 现有方法是用 Roe 格式计算无黏通量^[10], 以 ξ 方向为例, 其形式为

$$\bar{F}_{\pm 1/2, j} = \frac{1}{2} [F(q_i) + F(q_{i+1}) - (FR|A|R^{-1})_{i+\frac{1}{2}, j}(q_{i+1} - q_i)]$$

本文将上述基于 Roe 格式的预处理算法记为 Pre-Roe 格式.

1.5 预处理 Roe 格式不稳定性 and 计算有效性分析

预处理在理论上是一种完美的方法, 理想情况下式(3)中的 ϵ 应取为与当地马赫数平方同量级. 但在实际应用中, 这将使预处理计算稳定性变坏. 李雪松等^[10]指出, 预处理稳定性下降的主要原因出在特征矩阵中存在 $1/\epsilon$ 这样结构的因子. 当 ϵ 较小而又有着较大的梯度时, 这些包含 $1/\epsilon$ 的项使得特征矩阵 R 显著放大了 ϵ 的扰动, 引起计算振荡. 式(3)中采用远场来流马赫数对 ϵ 进行截断, 从而改善了计算的稳定性.

本文认为这种带有全局截断参数的当地极值预处理方法可以改进计算的稳定性, 但是与来流远场马赫数对应的全局截断参数将加大极低速区的耗散, 对某些低速区相对较大的流场, 将产生相当大的影响, 从而得不到满意的结果.

1.6 数值黏性及低耗散 Roe 格式

为此, 本文对计算格式的数值黏性进行调节, 以标量双曲型守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

为例, 其守恒型差分格式为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{f}_{i+1/2}^n - \bar{f}_{i-1/2}^n) \quad (4)$$

式(4)中的数值通量可表示为

$$\bar{f}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[f_i + f_{i+1} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^{\alpha-1} |a|^\alpha (u_{i+1} - u_i) \right] \quad (5)$$

其中 $a = f'(u)$.

当 $\alpha = 1$ 时, 式(4)为 Roe 格式; 当 $\alpha = 2$ 时, 式(4)为 Lax-Wendroff(L-W)格式, 当 $\alpha = 0$ 时, 式(4)为 Lax-Friedrichs 格式.

显然, 指数 α 可用来控制数值黏性. 当 $\alpha = 0$ 时, 数值黏性最大; 而当 $\alpha = 2$ 时, L-W 格式为二阶格式, 无数值黏性. 因此 α 应在 $0 \sim 2$ 之间取值.

将这一分析应用于 Pre-Roe 格式, 就得到本文的低耗散 Roe 格式. 记作 Pre-Roe(α)格式, 其无黏数值通量为

$$\bar{F}_{\pm 1/2, j} = \frac{1}{2} \left[F(q_i) + F(q_{i+1}) - \left(\frac{\Delta t}{\Delta \xi} \right)^{\alpha-1} (FR|A|R^{-1})_{i+\frac{1}{2}, j}(q_{i+1} - q_i) \right] \quad (6)$$

当 $\alpha = 1$ 时, 即为 Pre-Roe 格式.

带全局截断参数的当地极值预处理方法采用来流作为全局截断参数, 流场可按照速度场分为小于来流速度和大于来流速度两部分. 小于来流速度的区域, 全局截断参数的引入将产生过大的耗散. 所以, 在保证流场计算稳定性的前提下, 数值黏性可以适当减小, 即这部分区域的 α 值介于 $1 \sim 2$. 而大于来流速度的区域, 预处理参数已与当地马赫数的平方同量级. 为增强计算的稳定性, 数值黏性还可以适当增大, 即这部分区域的 α 值介于 $0 \sim 1$.

根据上述分析, 使用 Pre-Roe(α)格式时, 本文以下算例 α 均按照下式取值:

$$\begin{cases} \alpha = 1 & Ma \geq Ma_{\text{ref}} \\ \alpha = 2 - (Ma/Ma_{\text{ref}})^2 & Ma < Ma_{\text{ref}} \end{cases} \quad (7)$$

这样可以根据当地马赫数 Ma 与来流马赫数 Ma_{ref} 的比值来调节计算所用的数值黏性参数 α . 当地马赫数越小, Ma/Ma_{ref} 的值越小, α 越大并趋近于 2, 格式黏性越小. 当地马赫数大于等于来流马赫数的区域 α 取值为 1, 以保证计算的稳定性. 图 1 给出了数值黏性参数 α 与 Ma/Ma_{ref} 的关系曲线.

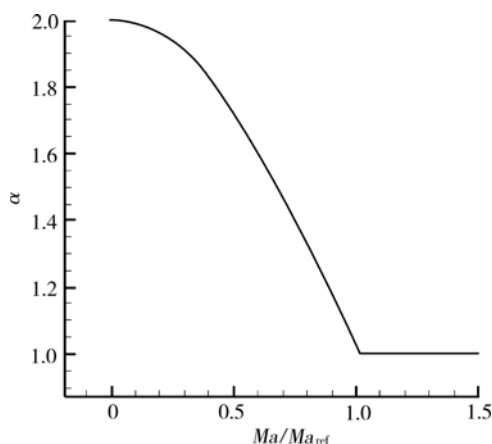


图1 数值黏性参数 α 与 Ma/Ma_{ref} 的关系

Fig. 1 Relationship of numerical viscosity parameter α and Ma/Ma_{ref}

由上述分析可见,数值黏性参数 α 的引入可以在全流场内平衡格式的数值耗散与计算稳定性两方面的要求。

2 计算结果

低马赫数、低雷诺数圆柱绕流和低马赫数、高雷诺数 NACA0012 翼型绕流是定常不可压缩流动问题数值模拟的典型算例。本文使用 Pre-Roe(α)格式对这两种低速流动问题进行数值实验,并与 Pre-Roe 格式的结果进行比较。

2.1 圆柱绕流

对于经典的圆柱绕流的定常流场,在圆柱后侧应出现对称分布的一对分离涡,且随着雷诺数的增大逐渐变长。圆柱表面的压力分布和分离涡的大小是验证数值方法的重要指标。

算例中,来流马赫数为 $Ma_{ref} = 10^{-3}$, 雷诺数分别为 20 和 40。马赫数和雷诺数中定义基于来流速度和圆柱的直径。计算区域取为 40 倍圆柱直径,计算网格采用 O 型网格,网格数为 100×300 。

对于 $Re=20$ 的情况,图 2 给出了流线对比图,图 3 为圆柱表面压力系数对比图。而对于 $Re=40$ 的情况,图 4 为流线对比图,图 5 则是圆柱表面压力系数的对比。

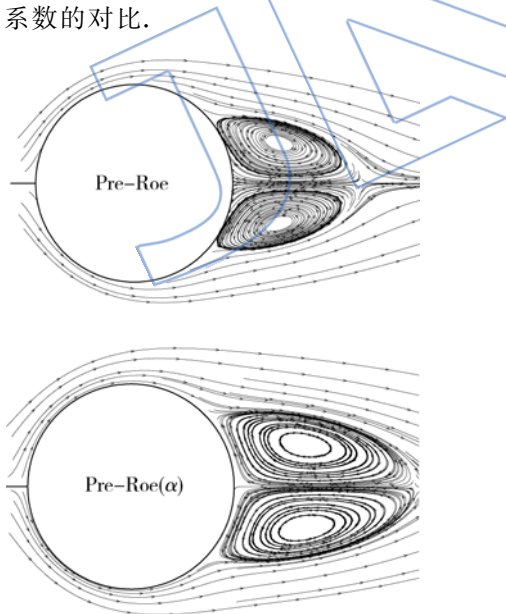


图 2 圆柱绕流流线($Re=20$)

Fig. 2 Streamline past a cylinder ($Re=20$)

从图 2~图 5 中可以看到 $Re=20$ 和 $Re=40$ 时,用现有 Pre-Roe 格式计算的圆柱尾涡发展不够充分,圆柱后部表面压力系数与文献相差较大;用本文提出的低耗散的 Pre-Roe(α)格式计算的结果与文献结果符合得很好。这是因为在圆柱后

部的低速和极低速区,Pre-Roe(α)格式的低耗散性更符合真实流动的耗散。

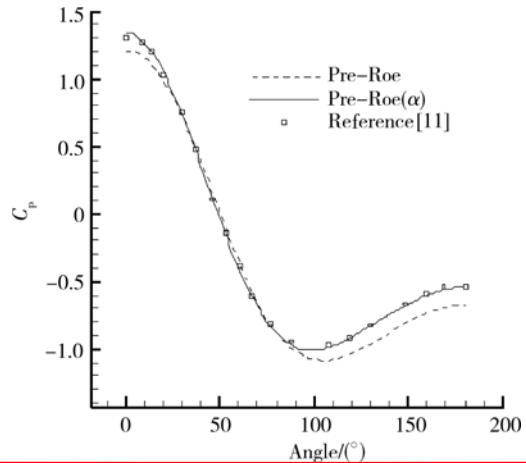


图 3 圆柱表面压力系数($Re=20$)

Fig. 3 Cylindrical surface pressure coefficient ($Re=20$)

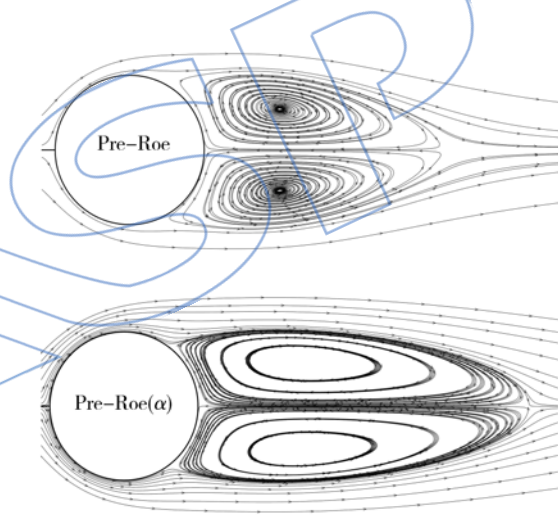


图 4 圆柱绕流流线($Re=40$)

Fig. 4 Streamline past a cylinder ($Re=40$)

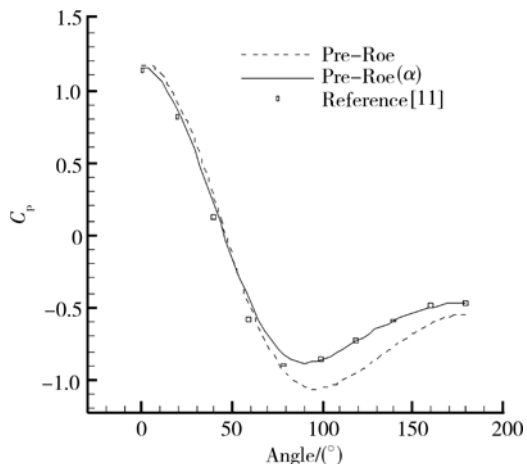


图 5 圆柱表面压力系数($Re=40$)

Fig. 5 Cylindrical surface pressure coefficient ($Re=40$)

对于 $Re=20$ 的情况,使用本文方法计算了马赫数分为 $Ma=10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ 的流场压力等值线,三种马赫数下,流场压力等值线几乎完全重合,如图 6 所示。

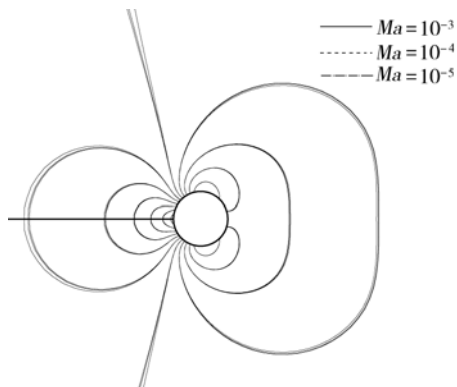


图 6 Pre-Roe(α)方法计算的三种马赫数下流场压力等值线($Re=20$)

Fig. 6 Flow field pressure contours calculated with Pre-Roe(α) at three Mach numbers ($Re=20$)

$Re=20$ 和 $Re=40$ 时,两方法计算的圆柱尾涡尺寸 L 与圆柱直径 D 之比的关系,如表 1 所示.从表中可以看出,原来的 Pre-Roe 格式不能给出正确的结果,而本文通过调节格式黏性,Pre-Roe(α)格式就可以得到正确的结果。

表 1 Pre-Roe 格式与 Pre-Roe(α)格式计算的圆柱绕流 L/D 的结果对比

Table 1 L/D Comparison of flow past a cylinder between Pre-Roe scheme and Pre-Roe(α) scheme

Re	Ma	文献[11]	Pre-Roe(α)	Pre-Roe
20	10^{-3}	0.91	0.93	0.78
	10^{-4}	0.91	0.92	0.78
	10^{-5}	0.91	0.93	0.77
40	10^{-3}	2.24	2.23	1.53
	10^{-4}	2.24	2.25	1.54

2.2 NACA0012 翼型绕流

算例中,来流马赫数为 $Ma_{ref}=10^{-3}$,雷诺数为 $Re=7 \times 10^5$,迎角 $\theta=0^\circ$,计算中采用 O 型结构化网格,网格数为 400×125 ,网格局部图如图 7 所示.图 8 为 NACA0012 翼型表面压力系数分布对比图。

从图 8 可以看到,使用 Pre-Roe(α)格式计算的 NACA0012 表面压力系数分布比使用 Pre-Roe 格式计算的结果更接近文献[12].

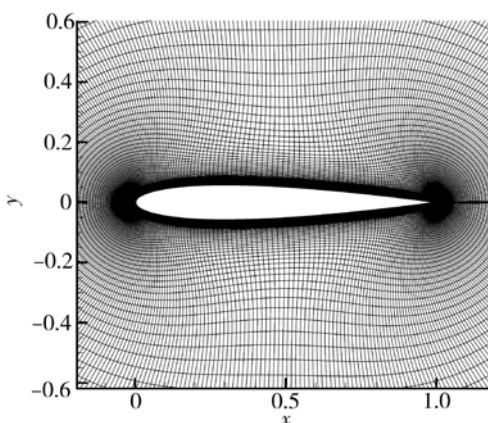


图 7 NACA0012 翼型网格局部图

Fig. 7 Local grid map of NACA0012 airfoil

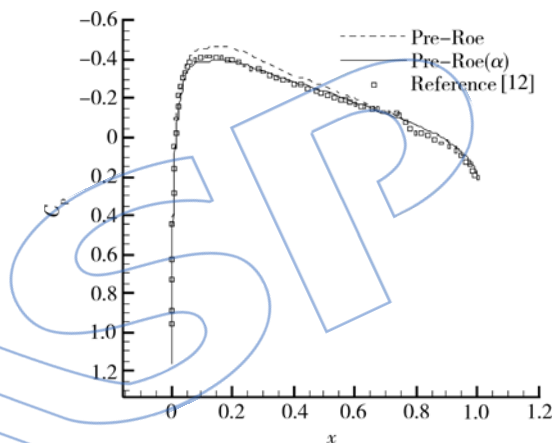


图 8 NACA0012 翼型表面压力系数分布对比图

Fig. 8 Comparison chart of NACA0012 airfoil surface pressure distribution

3 结 论

使用预处理方法计算低速流动时,预处理矩阵中存在的不稳定结构破坏了流场计算的稳定性,而为此采用带有全局截断参数的当地极值预处理方法又增大了低速区的耗散.本文提出了可调节计算格式数值黏性的低耗散 Roe 格式,并分析了可调节参数 α 的取值规律.在小于来流速度的区域 α 取值应介于 $1 \sim 2$,以降低数值耗散,尽量与实际耗散同尺度;而在与来流速度相同或者大于来流速度的区域 α 取值应介于 $0 \sim 1$,以保持计算格式的稳定性.在全流场范围内平衡了计算稳定性和计算可靠性两方面要求,对低马赫数、低雷诺数定常圆柱绕流和低马赫数、高雷诺数 NACA0012 翼型绕流所做的数值实验表明该方法是有有效的和可靠的。

参考文献:

- [1] Darmofal D L, Schmid P J. The importance of eigenvectors for local preconditioners of the Euler equations[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 127(2): 346-362.
- [2] Weiss J M, Smith W A. Preconditioning applied to variable and const density flows[J]. AIAA Journal, 1995, 33(11): 2050-2057.
- [3] Turkel E, Radespiel R, Kroll N. Assessment of preconditioning methods for multidimensional aerodynamics[J]. Computers and Fluids, 1997, 26(6): 613-634.
- [4] Turkel E. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations [J]. Journal of Computational Physics, 1987, 72(2): 277-298.
- [5] Merkle C L, Sullivan J Y, Buelow P E, et al. Computation of flow with arbitrary equations of state[J]. AIAA Journal, 1998, 36(4): 515-521.
- [6] Choi D, Merkle C L. Application of time-iterative schemes to incompressible flow[J]. AIAA Journal, 1985, 28(10): 1518-1524.
- [7] Lee S H. Convergence characteristics of preconditioned Euler equations[J]. Journal of Computational Physics, 2005, 208(1): 266-288.
- [8] Venkateswaran S, Li D, Merkle C L. Influence of stagnation regions on preconditioned solutions at low speeds[R]. AIAA 2003-435, 2003.
- [9] Yoon S, Jameson A. Lower-upper symmetric-Gauss-Seidel method for the Euler and Navier-Stokes equations [J]. AIAA Journal, 1988, 26(9): 1025-1026.
- [10] 李雪松, 徐建中, 顾春伟. 预处理方法与大涡模拟工程应用[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2009, 39(1): 83-90.
LI Xuesong, XU Jianzhong, GU Chunwei. Preconditioning method on the application of LES[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2009, 39(1): 83-90. (in Chinese)
- [11] Fornberg B. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1980, 98(4): 819-855.
- [12] Ladson C. Effects of independent variation of Mach and Reynolds numbers on the low-speed aerodynamic characteristics of the NACA0012 airfoil section [R]. NASA Technical Memorandum 4074, 1988.